CONTRÔLE N°2

Terminale Spé.
Le jeudi 19 octobre 2023
1 heure

I. Déterminer les limites suivantes en justifiant soigneusement :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} - 3x + 1$

2.

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 5x - 4$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2+5x-4}}{x^2+5x-4}$

3. $\lim\limits_{x \to 0-} \sqrt{25 - \dfrac{1}{x}}$

II. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x} - 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction g en faisant apparaître les limites.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire une ou des asymptotes éventuelles à la courbe de g.

III. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{-2x^2+3x+2}{x-1}$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en 1^{-}.
2. En déduire une ou des asymptotes éventuelles à la courbe de f.

On admet que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{-2x^2+4x-5}{(x-1)^2}$.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. Étudier la position relative de C_f et de la droite T.

CORRECTION DU CONTRÔLE N°2 **Terminale Spé.**

I.

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - 3x + 1 = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{3x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{3x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$

Alors, par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - 3x + 1 = +\infty}$

2.

a. Pour tout x de $\mathbb{R}$*, $x^2 + 5x - 4 = x^2\left(1 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} = 1$ donc, par produit, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 5x - 4 = +\infty}$**.**

b. On pose $X = x^2 + 5x - 4$

D'après la question a, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$

Or, d'après le cours, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Alors, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x^2+5x-4}}{x^2+5x-4}} = +\infty$

3. On pose $\mathrm{X} = 25 - \frac{1}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0-} X = +\infty$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0-} \sqrt{25 - \frac{1}{x}}} = +\infty$

II. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x - 1$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (d'après le cours) donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1}$

3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = -1\mathrm{e}^x + (1 - x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$. On peut donc construire le tableau suivant :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
$\boldsymbol{-x}$	$+$	$-$
$\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}$	$+$	$+$
$\boldsymbol{g'(x)}$	$+$	$-$
$\boldsymbol{g(x)}$	-1 ↗ 0	↘ $-\infty$

$g(0) = (1 - 0)\mathrm{e}^0 - 1 = 0$

4. Le maximum de g sur $\mathbb{R}$ est 0 donc, **pour tout x de $\mathbb{R}$, g(x) ≥ 0.**

5. **La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$.**

III. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{-2x^2+3x+2}{x-1}$

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2\left(-2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{x\left(-2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}=1$

Alors, par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} -2x^2+3x+2=3$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x-1=0$

On cherche le signe de $x-1$:

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$\boldsymbol{x-1}$	$-$	$+$

$\lim\limits_{x\to1^-} -2x^2+3x+2=3$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x-1=0^-$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty}$**.**

2. La droite d'équation $\boldsymbol{x=1}$ est asymptote à la courbe de $\boldsymbol{f}$.

3. T a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Pour tout $x\neq1$, $f'(x)=\frac{(-4x+3)(x-1)-(-2x^2+3x+2)1}{(x-1)^2}=\frac{-4x^2+4x+3x-3+2x^2-3x-2}{(x-1)^2}=\frac{-2x^2+4x-5}{(x-1)^2}$

$f'(0)=-\frac{5}{1}=-5$ et $f(0)=\frac{2}{-1}=-2$ donc $\boldsymbol{T}$ **a pour équation** $\boldsymbol{y=-5x-2}$**.**

Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

4. On cherche le signe de $f(x)-(-5x-2)$.

Pour tout $x\neq1$, $f(x)-(-5x-2)=\frac{-2x^2+3x+2-(-5x-2)(x-1)}{x-1}=\frac{-2x^2+3x+2+5x^2-5x+2x-2}{x-1}=\frac{3x^2}{x-1}$

On peut alors construire le tableau suivant :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ 0 1 $+\infty$		
$\boldsymbol{3x^2}$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{x-1}$	$-$	$-$	$+$
$\boldsymbol{\frac{3x^2}{x-1}}$	$-$	$-$	$+$
position relative	C_f en dessous de T	C_f en dessous de T	C_f au dessus de T